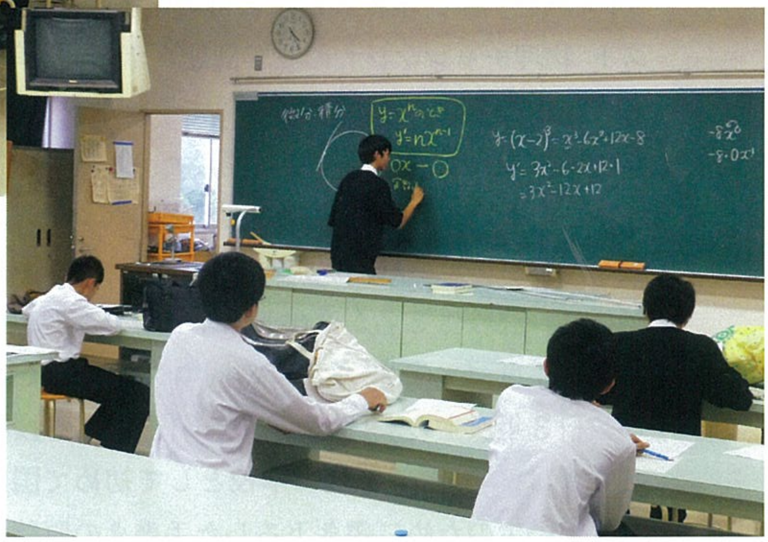
物理オリンピックのための物理数学

― 微分積分・ベクトル解析・電磁気学 ―



平成２９年３月

岡山県立倉敷天城高等学校

「天城塾」

巻頭言

岡山県立倉敷天城高等学校
校長　　中　塚　多　聞

国際科学技術オリンピックを目指す本校「天城塾」が作成いたしましたテキスト「物理オリンピックのための物理数学 — 微分積分・ベクトル解析・電磁気学 —」を刊行するに当たり，一言ご挨拶申し上げます。

本校は，平成17年度に文部科学省からスーパーサイエンスハイスクール（ＳＳＨ）の指定を受けて以来，２期10年にわたって理数教育についてのカリキュラム開発や人材育成，国際性の育成の充実などに努めてまいりました。平成27年４月には新たに向こう５年間の３期目の指定を受け，これまでの取組の充実発展を図るとともに，課題研究を中心とし，学習評価などについての新たな研究開発に着手したところでございます。

「天城塾」は，本校高校生と併設中学校生徒が自主的に集まり，「全国物理コンテスト 物理チャレンジ」の実験課題レポートに取り組んだり，学習会を開催したりするために開設した校内の「塾」です。平成24年の開設当初は，教員が主導して実験に取り組んだり，学習会を開いたりしておりましたが，近年は高校生のリーダーを中心とした自主的な取組へと成長しています。おかげをもちまして，昨年度（平成27年度）の「全国物理コンテスト 物理チャレンジ2015」における第２チャレンジには，高校生３名が進出し，本校としては初めて「銅賞」を授与されました。また，今年度（平成28年度）の同コンテストでは，第２チャレンジに５名が進出し，理数科３年次生の末長祥一さんが「金賞」を授与されました。

本書は，平成27年度に本校として初めて国内大会でメダルを獲得した北濵駿太さんが塾生のために書き下ろした手書きの原稿をまとめてテキストにしたものです。本書を手にした校内外の物理好きの中学生・高校生の皆さんの中から国際物理オリンピックに出場し，将来科学技術の分野で国際的に活躍してくれる人材が育ってくれることを切に願っています。

最後になりましたが，本校ＳＳＨ研究開発事業を推進するに当たりまして，日ごろから御指導･御助言をいただいております，文部科学省初等中等教育局教育課程課，同省科学技術・学術政策局人材政策課，国立研究開発法人科学技術振興機構，管理機関であります岡山県教育庁高校教育課，本校運営指導委員の皆様に厚く御礼申し上げます。

目　次

Ⅰ　微分・積分

Ⅱ　ベクトル解析

Ⅲ　マクスウェル方程式から入る電磁気

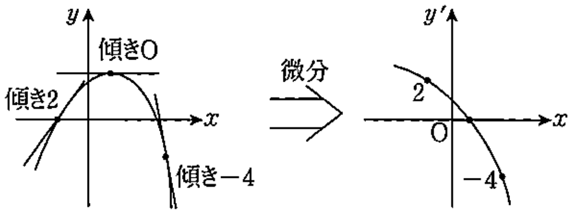
Ⅰ　微分・積分

※あくまで物理での道具としての微積なので，説明を極力省き結果論を書くこととする。

0.微分の意味

微分した関数を導関数という。

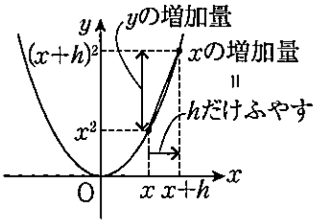
導関数とは，もとの関数の接線の傾きの関数である



重要
もとの関数が$y=$〜なら，導関数は$y'=$〜と書く。
もとの関数と導関数はイコールの関係ではない!!

実際に導関数を求める。

Ex1 $y=x^2$を微分する



接線の傾き(1点の傾き)を出すのは無理！

↓

とりあえず，2点を図のようにとって2点間の傾きを求める。

$$(\text{傾き})=\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$=\frac{2x\cancel{h}+h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}}\overset{\text{約分}}{=}2x+h \quad h=0\text{を代入}$$

hが0になれば1点に重なるから，$\underline{y'=2x}$

1.微分・その1(数Ⅱ＋α)

0章と同様に考えると，次のようになる。

$y=x^2 \Longrightarrow y'=2x$

$y=x^3 \Longrightarrow y'=3x^2$

$y=x^4 \Longrightarrow y'=4x^3$

ここから分かるように，

★多項式の微分

$y=x^n \Longrightarrow y'=\underset{①n\text{を前に出す}}{\underline{\underline{n}}}\,x^{\underline{n-1}}$　②次数を1つ下げる

Pr1 (1)　x^6を微分せよ。

(2)　$y=x^8$のとき，y'を求めよ。

Ex2 $y=3x^4-2x$のとき，　x'と考える

$y'=\underset{\text{そのまま}}{\underline{\underline{3}}}\cdot\underset{\text{公式}}{\underline{\underline{4x^3}}}-\underset{\text{そのまま}}{\underline{\underline{2}}}\cdot\underset{\text{公式}}{\underline{\underline{1x^0}}}=12x^3-\underset{0\text{乗は}1\text{より}}{\underline{\underline{2}}}$

Pr2 次の関数を微分せよ。※慣れたら暗算で

(1)　$y=2x^2-3x+4$　ヒント 4を$4x^0$と考える

(2)　$y=\frac{2}{3}x^6-x^4+3x^3-2x+1$

(3)　$y=(x+2)^3$　ヒント 展開しよう

Ex3 **Pr2** (3)の別のやり方

$x+2$をひとまとまりとみて，$\underline{y'=3(x+2)^2}$

⚠しかし！　この方法を$y=(2x+3)^2$で試すと

〈展開するやり方〉
$y=4x^2+12x+9$
$\therefore y'=8x+12$(正)

〈ひとまとまりとみるやり方〉
$y'=2(2x+3)$
$=4x+6$(誤)

上記のように答が合わないのは，このやり方(実は合成関数の微分法という)をする時は，ひとかたまりとしてみたものの導関数をさらにかけてやらないといけないからだ。(上の場合，$4x+6$に，$2x+3$の導関数である2をかける)

Pr3 次の関数を微分せよ。

(1)　$(2x^2-1)^4$

(2)　$3(x-3)^3-2(3x-1)^2$

※y'のことを$\dfrac{dy}{dx}$とかくことがある。

$f(x)$を微分することを，$\dfrac{d}{dx}f(x)$とかくことがある。

★覚えるとよい
・$y=\triangle x \Longrightarrow y'=\triangle$
　(xをとる！)
・定数は微分すると消える

Ex4 $\dfrac{d}{dx}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(x+\underline{\underline{x^{-1}}}\right)=1+(-1)x^{-2}=\underline{1-\dfrac{1}{x^2}}$

$\dfrac{d}{dx}\sqrt{x}=\dfrac{d}{dx}\underline{\underline{x^{\frac{1}{2}}}}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\underline{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

(分母のxはマイナス乗，根号は分数乗とみて計算する)

Pr4 (1)　$\dfrac{d}{dx}\left(x^2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{3}{3x^4}\right)$

(2)　$\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$　ヒント $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$

(3)　$\dfrac{d}{dx}(\sqrt{2x+1})$　ヒント 合成関数の微分法

ちなみに…等加速度直線運動の式で

$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ ⤵ tで微分

$v=at+v_0$ ⤵ tで微分

$a=a$(一定)

★
距離，速度，加速度は微分積分の関係

2.不定積分・その1(数Ⅱ＋α)

積分は微分の逆である。(掛け算と割り算のようなもの)

例えば，$x^2 \underset{\text{せきぶん}}{\overset{\text{びぶん}}{\rightleftarrows}} 2x$

※積分を表すには，関数を$\int$とdxではさむ。微分の逆操作をすればいいので，次のようになる。

★多項式の積分

$$\int x^n dx=\frac{1}{\underline{\underline{n+1}}}x^{\underline{n+1}}+{}^{※}C$$

②$n+1$で割る　①次数を1つ上げる

※積分定数Cについて

定数はすべて微分すると0になるので，定数をCとして書いておく。

Ex5 $\int(3x^4-5x^2+4)\,dx$

$=\underset{\text{そのまま}}{\underline{\underline{3}}}\cdot\underset{\text{公式}}{\underline{\underline{\frac{1}{5}x^5}}}\ \underset{\text{そのまま}}{\underline{\underline{-5}}}\cdot\underset{\text{公式}}{\underline{\underline{\frac{1}{3}x^3}}}+4x+\underset{\text{忘れない}}{\underline{C}}$

★覚えるとよい
$\int\Delta\,dx=\Delta x$　(定数はxをつける)

$\int\left(\dfrac{5}{x^2}-\sqrt{x}\right)dx=\int\left(5x^{-2}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

$=5\cdot\dfrac{1}{-1}x^{-1}-\dfrac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}=\underline{-\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C}$

Pr5 (1) $\int(-2x^5+4x^2-3x)\,dx$

(2) $\int(x-5)^2dx$ ヒント 積分は展開するしかない

(3) $\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)dx$

※現時点では，$\int\frac{1}{x}dx$ は $\frac{1}{0}x^0$ となり積分できない

理由は省略するが，この積分は次のようになる。

★$\frac{1}{x}$の積分

$\int\frac{1}{x}dx=\log|x|+C$

←絶対値がつくのは，log をxが負のときも定義できるようにするため

3.微分・その2(数Ⅲ)

0章と同様に考えると次のことが成り立つ。

★対数・三角関数の微分

$\frac{d}{dx}\log x=\frac{1}{x}$ （上記の積分公式の逆）

$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$，$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$

理由は省略するが，記憶すること！

Ex6 合成関数の微分法を用いる

$\frac{d}{dx}\sin(x^2+x+1)=\underline{\underline{(2x+1)}}\cos(x^2+x+1)$

微分したものをかける

$\frac{d}{dx}\log(\cos x)=(-\sin x)\cdot\frac{1}{\cos x}=-\frac{\sin x}{\cos x}=\underline{-\tan x}$

Pr6 (1) $\frac{d}{dx}\cos(\sin x-2x^3)$ (2) $\frac{d}{dx}(\log x+1)^2$ (3) $\frac{d}{dx}\sin^2x$ (4) $\frac{d}{dx}\log(\log x)$

★微分の技～積・商の微分～

積：$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

商：$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

Ex7 $\frac{d}{dx}(\sin x\cos x)=\underline{\cos^2x-\sin^2x}$

たすきがけして，足す！

微 微

$\cos x$ $-\sin x$

結果より

$\frac{d}{dx}\tan x=\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x}$ 微 $\cos x$ 微 $-\sin x$

$=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\underline{\underline{\cos^2x}}}=\underline{\frac{1}{\cos^2x}}$ たすきがけして，引く！

分母は2乗

★覚えるとよい

(tan$x$の微分) $\frac{d}{dx}\tan x=\frac{1}{\cos^2x}$

Pr7 (1) $\frac{d}{dx}x^2\log x$ (2) $\frac{d}{dx}\frac{x^2+x-3}{x+1}$ (3) $\frac{d}{dx}\frac{1+\sin x}{1-\cos x}$ (4) $\frac{d}{dx}e^x\sin x$

★e^xの微分

$\frac{d}{dx}e^x=e^x$

(変わらない)

Ex8 (対数微分法) $y=x^x$を微分せよ。

両辺の対数をとって $\log y=x\log x$

両辺をxで微分 $\frac{y'}{y}=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$

$\therefore y'=(\log x+1)y=\underline{x^x(\log x+1)}$

Pr8 (1) $\frac{d}{dx}x^{\sin x}$

(2) $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{\frac{(x+3)^4(x-2)^3}{(2x+1)^2}}$ （対数微分法で）

4.不定積分・その2

※微分の逆だから

$\int\sin x\,dx=-\cos x$，$\int\cos x\,dx=\sin x$

★積分の原則

積・商は和の形に直してから積分！

Ex9 $\int\frac{x+1}{x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\underline{\log|x|-\frac{1}{x}+C}$

$\int\frac{2}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\log|x-1|-\log|x+1|+C=\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

$\log a-\log b=\log\frac{b}{a}$

分母を因数分解

Pr9 (1) $\int\frac{x-\cos^2x}{x\cos^2x}dx$ (2) $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^3}{\sqrt{x}}dx$ (3) $\int\frac{x^3+x}{x^2-1}dx$ (4) $\int\frac{x+5}{x^2+x-2}dx$ (5) $\int\frac{x}{\sqrt{x+9}+3}dx$ (有理化)

合成関数の微分

▲微分の逆だから，$\frac{d}{dx}f(ax+b)=f'(ax+b)\cdot a$ より

$\int f'(ax+b)\,dx=\frac{1}{\underline{\underline{a}}}f(ax+b)$ が成り立つ。

Ex10 $\int\sqrt{2x+3}\,dx=\frac{1}{\underline{\underline{2}}}\cdot\frac{2}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}+C$

$=\underline{\frac{1}{3}(2x+3)\sqrt{2x+3}+C}$

Pr10 (1) $\int\cos\left(\frac{2}{3}x-1\right)dx$

(2) $\int\frac{dx}{4x+5}$ ← $\int\frac{1}{4x+5}dx$ と同じ意味

★積分の技～置換積分・部分積分～

①置換積分

$t=f(x)$ とおくと $\frac{dt}{dx}=f'(x)$ $\therefore dt=f'(x)dx$

②部分積分

$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx$

Ex11 (置換積分) $\int(2x+1)\sqrt{x+2}\,dx$

$\sqrt{x+2}=t$ とおく←$\sqrt{\ }$ をまとめてtとおくと楽になる

$x=t^2-2$ より $\frac{dx}{dt}=2t$ $\therefore \underline{dx=2tdt}$

分数のように扱える

よって $\displaystyle\int(2x+1)\sqrt{x+2}\,dx=\int\{2(\underbrace{t^2-2}_{代入})+1\}\underbrace{t}_{代入}\cdot\underbrace{2tdt}_{代入}$

$\displaystyle=\int 2t^2(2t^2-3)\,dt=\int(4t^4-6t^2)\,dt$

$\displaystyle=\frac{4}{5}t^5-2t^3+C$ tをxにもどす

$\displaystyle=\frac{4}{5}(x+2)^2\sqrt{x+2}-2(x+2)\sqrt{x+2}+C$

$\displaystyle=\underline{\frac{2}{5}(2x-1)(x+2)\sqrt{x+2}+C}$

$\boxed{\text{Ex12}}$ $\displaystyle\int\sin^3x\cos x\,dx$

$\sin x=t$とおくと ← $\boxed{\displaystyle\int f(\sin x)\cos x\,dx \text{ は } \sin x \text{を}, \quad \int f(\cos x)\sin x\,dx \text{ は } \cos x \text{を} t \text{とおく}}$

$\displaystyle\frac{dt}{dx}=\cos x \quad \therefore\ dt=\cos x\,dx$

よって $\displaystyle\int\sin^3x\cos x\,dx=\int\underbrace{t^3}_{代入}\underbrace{dt}_{代入}=\frac{t^4}{4}+C=\underline{\frac{1}{4}\sin^4x+C}$

$\boxed{\text{Pr11}}$ (1) $\displaystyle\int(x+2)\sqrt{1-x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int\frac{x}{(x+3)^2}dx$ $\boxed{\text{ヒント}}$ $x+3=t$

(3) $\displaystyle\int(\sin x\cos^2x-\sin x\cos x)\,d$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\log x}$ $\boxed{\text{ヒント}}$ $\log x=t$

(5) $\displaystyle\int(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$ $\boxed{\text{ヒント}}$ $x^2+x+1=t$

(6) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{e^x+2}dx$ $\boxed{\text{ヒント}}$ $e^{2x}=(e^x)^2$

(7) $\displaystyle\int\left(\tan x+\frac{1}{\tan^2x}\right)dx$ $\boxed{\text{ヒント}}$ $1+\tan^2x=\dfrac{1}{\cos^2x}$

(8) $\displaystyle\int\frac{x}{1+x^2}\log(1+x^2)\,dx$ $\boxed{\text{ヒント}}$ 置換積分を2回使う

習うより慣れろ！

★上の結果より

$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$ ← $\boxed{\text{Pr11}}$(4)でも使える

$\boxed{\text{Pr12}}$ $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2+2x-1}dx$

$\boxed{\text{Ex13}}$ (部分積分) ▲積の形の積分に有効!!

$\displaystyle\int xe^{2x}dx=x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx$

片方びぶん　片方せきぶん　$\boxed{\text{マイナスなので注意}}$

$1\leftarrow\dfrac{1}{2}e^{2x}$ ②○したものから上下にかける

①せきぶんした方に○

$\displaystyle=\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}=\underline{\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+C}$

$\displaystyle\int\log x\,dx=\int1\cdot\log x\,dx=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx$

$\boxed{\text{1をかけると考える！}}$　積　微　$=\underline{x\log x-x+C}$

$x\to\dfrac{1}{x}$

$\boxed{\text{Pr13}}$ (1) $\displaystyle\int xe^{-x}dx$

(2) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$

★$\log x$の積分

$\boxed{\text{Ex13}}$の結果より,

$\displaystyle\int\log x\,dx=x\log x-x+C$

習うより慣れろ！

(3) $\displaystyle\int x^2\log x\,dx$ $\boxed{\text{ヒント}}$ x^2の方が積分, $\log x$が微分

(4) $\displaystyle\int\frac{\log(\log x)}{x}dx$ $\boxed{\text{ヒント}}$ $\log x=t$とおく →からの部分積分

(5) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$ $\boxed{\text{ヒント}}$ 部分積分を2回使う

(6) $\displaystyle\int x^2e^x\,dx$ $\boxed{\text{ヒント}}$ 部分積分を2回使う

(7) $\displaystyle\int x\tan^2x\,dx$ $\boxed{\text{ヒント}}$ $1+\tan^2x=\dfrac{1}{\cos^2x}$ より

$\tan^2x=\dfrac{1}{\cos^2x}-1\Rightarrow$ こっちを積分

5. 不定積分・その3

★三角関数の積分(以下を山のように使います)

・2倍角：$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin\theta$

$=2\cos^2\theta-1\Rightarrow\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}$

$=1-2\sin^2\theta\Rightarrow\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$

・積→和の公式

$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

$\boxed{\text{Ex14}}$ $\displaystyle\int\cos^2x\,dx=\int\frac{1+\cos2x}{2}dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin2x+C$

$\displaystyle\int\sin2x\cos3x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin5x-\sin x)\,dx$

$\displaystyle=-\frac{1}{10}\cos5x+\frac{1}{2}\cos x+C$

$\boxed{\text{Pr14}}$ (1) $\displaystyle\int\sin^2x\,dx$

(2) $\displaystyle\int\cos3x\cos5x\,dx$

$\boxed{\sin^2x+\cos^2x=1 \quad \tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}}$

(3) $\displaystyle\int\cos^3x\,dx$ $\boxed{\text{ヒント}}$ $\cos^3x=\cos^2x\cdot\cos x$

$\cos^2x=1-\sin^2x\Rightarrow$ 置換積分

(4) $\displaystyle\int\frac{\sin x-\sin^3x}{1+\cos x}dx$ $\boxed{\text{ヒント}}$ $1-\sin^2x$ の形を見つけて置換積分

(5) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}$ $\boxed{\text{ヒント}}$ $\dfrac{1}{\cos x}=\dfrac{\cos x}{\cos^2x}$ $\boxed{\cos^2x=1-\sin^2x}$

置換積分する　原則：積は和に直す

(6) $\displaystyle\int\sin^2x\tan x\,dx$ $\boxed{\text{ヒント}}$ $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$　$\cos x=t$ とおいて置換積分

$\boxed{\text{Ex15}}$ $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$

積　微　$e^x\to\cos x$　　積　微　$e^x\to-\sin x$

$\displaystyle=e^x\sin x-\left(e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx\right)+C$

よって $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\,dx+C$

$\displaystyle\therefore\ 2\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-e^x\cos x+C$

$\boxed{\text{同じ形が出現} \Downarrow \text{方程式のように解く}}$

$\int e^x \sin x\,dx = \underline{\dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}} + C$

Pr16 (1) $\int e^{-x}\cos x\,dx$

(2) $\int \sin(\log x)\,dx$

6. 定積分・その1

★定積分の記号

積分したもの

$$\int_a^b f'(x)\,dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$$

積分したものに上の数を代入した値から，下の数を代入した値を引いてやる!!

※積分定数Cはいらない ⚠計算命。

Ex17 $\int_1^2 (x^2-3)\,dx = \left[\dfrac13 x^3 - 3x\right]_1^2$ ← まずはふつうに積分してやる

$= \underbrace{\left(\dfrac13\cdot2^3-3\cdot2\right)}_{2を代入} \underset{引く}{-} \underbrace{\left(\dfrac13\cdot1^3-3\cdot1\right)}_{1を代入} = -\dfrac23$

Pr17 (1) $\int_{-1}^1 (x^3-x)\,dx$

(2) $\int_0^1 \dfrac{4x-1}{2x^2+5x+2}\,dx$ ヒント 原則「積・商は和に直す」

(3) $\int_1^3 \dfrac{(x^2-1)^2}{x^4}\,dx$ ヒント 原則「積・商は和に直す」

(4) $\int_0^\pi (2\sin x+\cos x)^2\,dx$ ヒント 角度はラジアン単位

(5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 4x}{\cos 4x}\,dx$ ヒント 2倍角 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ 積→和の公式

(6) $\int_1^3 \dfrac{dx}{x^2+x}$ ヒント $\log a - \log b = \log\dfrac{a}{b}$

Ex18 (置換積分の定積分バージョン) $\int_1^4 \dfrac{x}{\sqrt{5-x}}\,dx$

$\sqrt{5-x}=t$とおくと$x=5-t^2$より$dx=-2t\,dt$

$x=4$のとき$t=1$，$x=1$のとき$t=2$であるから

$\int_1^4 \dfrac{x}{\sqrt{5-x}}\,dx = \int_2^1 \dfrac{5-t^2}{t}\cdot\underbrace{(-2t)\,dt}_{代入}$

$= \int_2^1 (-10+2t^2)\,dt = \left[-10t+\dfrac23 t^3\right]_2^1 = \underline{\dfrac{16}{3}}$

※定積分のときはtをxにもどさなくていい!!

Pr18 (1) $\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$ ヒント $\sqrt{2-x}=t$

(2) $\int_0^1 \dfrac{x-1}{(2-x)^2}\,dx$ ヒント $2-x=t$

(3) $\int_0^{\frac23\pi} \sin^3\theta\,d\theta$ ヒント 左を見よ！

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\theta}{2-\sin^2\theta}\,d\theta$ ヒント $\sin\theta=t$

Ex19 (部分積分の定積分バージョン)

$\int_1^2 \dfrac{\log x}{x^2}\,dx = \int_1^2 \log x\cdot\left(\dfrac1{x^2}\right)dx = \underline{\underline{\left[-\dfrac{\log x}{x}\right]_1^2}} + \int_1^2 \dfrac1{x^2}\,dx$

微 ↓ 積 ↓ どんどん代入する

$\dfrac1x \leftarrow -\dfrac1x$

$= -\dfrac{\log 2}{2} + \left[-\dfrac1x\right]_1^2 = \underline{-\dfrac{\log 2}{2} + \dfrac12}$

Pr19 (1) $\int_0^1 xe^x\,dx$

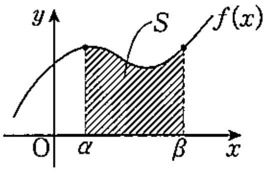
(2) $\int_1^e x^2\log x\,dx$

(3) $\int_1^e (\log x)^2\,dx$ ヒント $1\cdot(\log x)^2$と考える

(4) $\int_0^1 x^2(1-x)^3\,dx$ ヒント 部分積分を2回使う

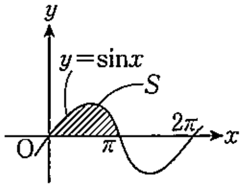
7. 定積分・その2

★面積



$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$は，$\alpha \le x \le \beta$までの部分の$f(x)$と$x$軸の間の面積を表す。（定積分の意味）

Ex20

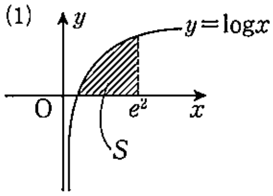


$S = \int_0^\pi \sin x\,dx$

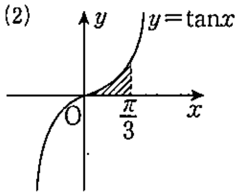
$= \left[-\cos x\right]_0^\pi$

$= \underline{2}$

Pr20 (1)

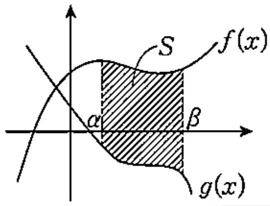


(2)



ヒント $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 置換積分

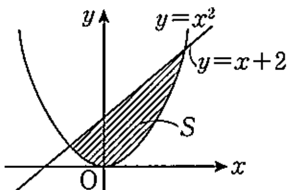
★間の面積



$S = \int_\alpha^\beta \{f(x) - g(x)\}\,dx$

上から下を引く!!

Ex21



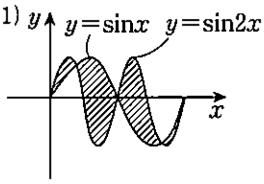
交点のx座標は$x^2=x+2$より$x=-1,\ 2$

$\therefore\ S = \int_{-1}^2 \{(x+2) - x^2\}\,dx$

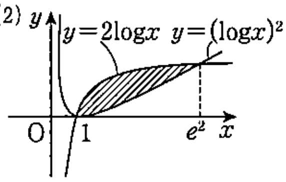
$= \left[\dfrac12 x^2 + 2x - \dfrac13 x^3\right]_{-1}^2$

$= \dfrac92$

Pr21 (1)



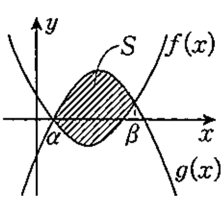
(2)



ヒント 半分を求めて2倍 上下が入れ変わったら2つに分ける

ヒント 部分積分（1かけると考える）

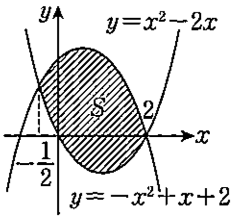
★放物線の面積



$f(x)-g(x)=ax^2+bx+c=0$
$\Longrightarrow x=\alpha,\ \beta$

$$S=-a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

Ex22 交点のx座標は $x^2-2x=-x^2+x+2$ より
$2x^2-3x-2=0$



$x=-\dfrac{1}{2},\ 2$

$$S=\frac{2}{6}\left(2+\frac{1}{2}\right)^3$$
$$=\frac{125}{24}$$

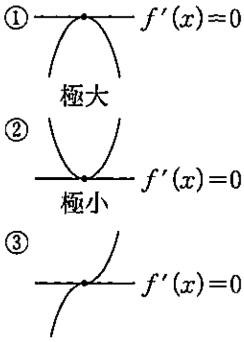
Pr22 次の曲線や直線で囲まれた面積Sを求めよ。

(1) $y=x^2-x-1,\ y=x+2$

(2) $2x^2-6x+4,\ y=-x^2+6x-5$

8. 最大・最小への応用

導関数は接線の傾きを表すから，$f'(x)=0$ のとき $f(x)$ は右図のように極大・極小になることが多い。(そうでない場合もある(右図の③))
※極大・極小…グラフが山型になる

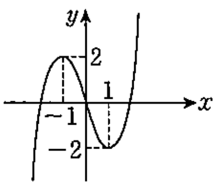


Ex23 $y=x^3-3x$のグラフをかけ。
$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$　∴ $x=\pm1$で極値をとる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	2	↘	-2	↗

←増減表という。
極値以外のところは適当な値をあてはめてy'が正か負かを判断する。
y'が$+$ $\Longrightarrow$ yは↗
y'が$-$ $\Longrightarrow$ yは↘ となる
原則，上から順に書けばOK

よってグラフは



Pr23 (1) $y=3x^4-16x^3+18x^2+5$ のグラフをかけ。

(2) $y=x+\dfrac{1}{x}$ のグラフをかけ。

(3) $y=(x^2-3)e^{-x}$ の極値を求めよ。

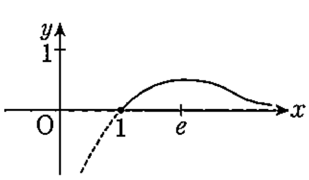
(4) $y=\dfrac{3x-1}{x^3+1}$ の極値を求めよ。

Ex24 $y=\dfrac{\log x}{x}$ $(x\geqq1)$の最大値・最小値を求めよ。

$$y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}=\frac{\log\frac{e}{x}}{x}$$

∴ $x=e$で極値をとる

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$
y'	$+$	$+$	0	$-$
y	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘



よって $\begin{cases} x=1\text{で最小値}0 \\ x=e\text{で最大値}\dfrac{1}{e} \end{cases}$

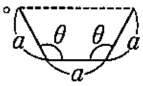
Pr24 (1) $y=x\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq1)$の最大・最小を求めよ。

(2) $y=\tan x-2x$ $\left(-\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$の最大・最小

(3) $y=x\sin x+\cos x$ $(0\leqq x\leqq2\pi)$の最大・最小

(4) $y=\dfrac{x^2-3x}{x^2+3}$ の最大・最小
($x\to\pm\infty$のとき$y=0$に注意)

Ex25 幅$3a$の板で図のような台形のといを作る。断面積を最大にするにはθをいくらにすればよいか。



(答)高さ $a\sin\theta$，上底 $a-2a\cos\theta$ より面積は

$$S=\frac{1}{2}a\sin\theta\{a+(a-2a\cos\theta)\}=a^2\sin\theta(1-\cos\theta)$$

$$S'=-a^2(2\cos\theta+1)(\cos\theta-1)$$
←計算の過程は省略。積の微分

よって $\cos\theta=-\dfrac{1}{2},\ 1$　∴ $\theta=\dfrac{2\pi}{3},\ 0$ で極値をとる。

$\theta=0$は不適だから，$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ で最大となる。

Pr25 半径rの球に内接する円錐の体積の最大値を求めよ。

9. 微分方程式

$y,\ \dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{d^2y}{dx^2}$($y$の2回微分)などの式から$y$にあてはまる関数を求めるものを，微分方程式という。

Ex26 $\dfrac{dy}{dx}=x^2+2$ を解くと $y=\dfrac{1}{3}x^3+2x+C$ $\left(\begin{array}{l}C\text{は}\\ \text{任意定数}\end{array}\right)$
両辺積分
「積分定数」とはいわない

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\sin x$　両辺積分して $\dfrac{dy}{dx}=-\cos x+C_1$

さらに両辺積分して $y=-\sin x+C_1x+C_2$ $\left(\begin{array}{l}C_1,\ C_2\text{は}\\ \text{任意定数}\end{array}\right)$

Pr26 (1) $x^3\dfrac{d^2y}{dx^2}=x^2+1$ を解け。　ヒント 両辺をx^3でわる

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=xe^x$　ヒント 部分積分

※$\dfrac{dy}{dx}$が入ったものを1階，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$が入ったものを2階微分方程式と呼ぶが，その解は階数だけの任意定数を含む。

★1階微分方程式の解き方

変数分離：方程式を $f(y)\dfrac{dy}{dx}=g(x)$ と変形

→両辺をxで積分 $\displaystyle\int f(y)\frac{dy}{\cancel{dx}}\cancel{dx}=\int g(x)\,dx$
消える

→$\displaystyle\int f(y)\,dy=\int g(x)\,dx$

Ex27 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$　変数分離すると　$y\dfrac{dy}{dx}=x$ $\left(\begin{array}{l}\text{両辺に}\\ y\text{をかけた}\end{array}\right)$

両辺をxで積分 $\displaystyle\int y\,dy=\int x\,dx$

∴ $\dfrac{1}{2}y^2=\dfrac{1}{2}x^2+C$　∴ $y^2=x^2+C$ ←Cは任意定数なので2がかかろうと平気

Pr27 (1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2}{y}$

★対数公式
$\log a=b \Longleftrightarrow a=e^b$
$C^{a+b} \Longleftrightarrow C^a\cdot C^b$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=-y$

(3) $x\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{dy}{dx}+1$ ヒント $\dfrac{dy}{dx}$でくくる

(4) $y+\dfrac{dy}{dx}=2x\dfrac{dy}{dx}$ ヒント $\log a=-\log b\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{b}$

(5) $e^x\dfrac{dy}{dx}=x^2+1$ ヒント 部分積分

(6) $(1+x^2)y\dfrac{dy}{dx}+(1+y^2)x=0$

★2階微分方程式の解き方

$a\dfrac{d^2y}{dx^2}+b\dfrac{dy}{dx}+C=0$

特性方程式という

$a\lambda^2+b\lambda+C=0$の解を$\lambda=\alpha,\ \beta$とすると微分方程式の解は$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$

※$\lambda=\alpha$(重解)のとき $y=(C_1x+C_2)e^{\alpha x}$

$\lambda=\alpha\pm\beta i$のとき $y=(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x)e^{\alpha x}$

なぜかは省略するが，記憶しておくこと。

Ex28 ・$\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+6y=0$

$\lambda^2-5\lambda+6=0$より　$\lambda=2,\ 3$

$\therefore\ \underline{y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}}$

・$\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+4y=0$

$\lambda^2-4\lambda+4=0$より　$\lambda=2$

$\therefore\ \underline{y=(C_1x+C_2)e^{2x}}$

・$\dfrac{d^2y}{dx}+\dfrac{dy}{dx}=-y \overset{変形}{\Longrightarrow} \dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}+y=0$

$\lambda^2+\lambda+1=0$より　$\lambda=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$\therefore\ \underline{y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\sin\dfrac{\sqrt3}{2}x+C_2\cos\dfrac{\sqrt3}{2}x\right)}$

Pr28 (1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=0$

(2) $9x\dfrac{d^2y}{dx^2}+4xy=12\dfrac{xdy}{dx}$

(3) $y\dfrac{d^2y}{dx^2}+2(x+y)\dfrac{dy}{dx}+3y^2=2x\dfrac{dy}{dx}$

Ex29 右辺にxの関数(余関数という)がある場合

→<u>まず$=0$を解いて，1つの解を見つけて足す</u>

$\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=-2\sin x\Longrightarrow$まず$\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=0$を解く

$\lambda^2-1=0\quad\therefore\ \lambda=\pm1\quad\therefore\ y=C_1e^x+C_2e^{-x}$

$y=\sin x$はもとの微分方程式の1つの解だから，求める解は $\underline{y=C_1e^x+C_2e^{-x}+\sin x}$

暗算がムリな時は，係数比較

Pr29 (1) $\dfrac{dy}{dx}+y=\cos x-\sin x$

ヒント 特性方程式は$\lambda+1=0$
1階なので任意定数は1個

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-y=-2\cos x$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+y=5$

(2)(3) 1つの解は暗算で

(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-2y=x$　ヒント 1つの解を$y=ax+b$とおいて係数比較

(5) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=e^{2x}$ ヒント 1つの解を $y=ae^{2x}$ とおいて係数比較

Ex30 空気抵抗 $R=kv$ (k:定数)のある自由落下の式を導け。

$ma=F$より$m\dfrac{d^2y}{dt^2}=mg-k\dfrac{dy}{dt}$ ← aはyの2回時間微分vはyの1回時間微分より

$m\lambda^2+k\lambda=0\quad\therefore\ \lambda=-\dfrac{k}{m},\ 0\quad\therefore\ y=C_1e^{-\frac{k}{m}t}+C_2$

1つの解は$y=\dfrac{mg}{k}t$だから，$y=C_1e^{-\frac{k}{m}t}+C_2+\dfrac{mg}{k}t$

$\therefore\ v=\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{k}{m}C_1e^{-\frac{k}{m}t}+\dfrac{mg}{k}$

$t=0$のとき$y=0$，$v=0$より

$$\begin{cases}C_1+C_2=0\\ -\dfrac{k}{m}C_1+\dfrac{mg}{k}=0\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}C_1=\dfrac{m^2g}{k^2}\\ C_2=-\dfrac{m^2g}{k^2}\end{cases}$$

ゆえに$\begin{cases}x=\dfrac{m^2g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t}-\dfrac{m^2g}{k^2}+\dfrac{mg}{k}t\\ v=-\dfrac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}+\dfrac{mg}{k}\end{cases}$

Pr30 ばねによる単振動の周期が$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$であることを示せ。

ヒント 三角関数の合成を使う

Ⅱ　ベクトル解析

0.偏微分

多変数関数において，ある文字について微分するときは，dのかわりに∂を用いる。rounded D“丸いD”

読み方は「デル」が多いが人によるらしい。

Ex1 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2y-x\sin\dfrac{y^2}{x}\right)=x^2-2y\cos\dfrac{y^2}{x}$

yについて偏微分　xは定数扱い！

$\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial z}xy^2\sqrt{z}=\dfrac{\partial}{\partial x}\quad\dfrac{xy^2}{2\sqrt{z}}=\dfrac{y^2}{2\sqrt{z}}$

zで偏微分　xで偏微分

Pr1 (1) $\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x}(x+xy+xyz)$

(2) $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}(x+xy+xyz)$

(3) $\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}(x^2e^{2y}\sin z)$

(4) $\dfrac{\partial^3}{\partial x\partial z\partial y}yz\tan xy$

★
(1)，(2)から分かるように偏微分の順序を変えても結果は同じ！

ヒント ↑のことを用いて，どういう順番で偏微分すると楽かを考えてみる

※また多変数関数を$f(x,\ y)$のように表すこともありその場合xでの偏微分は$f_x(x,\ y)$，xで1回，yで2回の偏微分は，$f_{yyx}(x,\ y)$のように書く。(記号の問題)

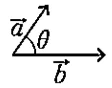
1.内積

内積は平面ベクトルでも，空間ベクトルでも定義できる。

▲内積はスカラーであることにくれぐれも要注意!!

★内積の定義

① $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$



② $\vec{a}=(a_x,\ a_y)$，$\vec{b}=(b_x,\ b_y)$のとき

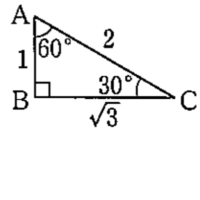
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y$

(空間も同様で，x成分・y成分・z成分をそれぞれかけて足す)

Ex2 右図において

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times2\times\cos60°=\underline{1}$

Pr2 右図において$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$，



$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}$ をそれぞれ求めよ。

※上から分かるように $\vec{a}\perp\vec{b}$ のときは $\cos 90^\circ=0$ なので $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Ex3 $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(3,\ 4)$のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times3+2\times4=11$ 距離公式を使う!

なす角 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{11}{\sqrt{1+4}\sqrt{9+16}}=\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$

Pr3 $\vec{a}=(2,\ -3,\ 0)$, $\vec{b}=(-5,\ 1,\ 4)$のとき

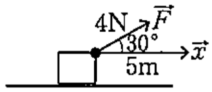
(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ

(2) なす角をθとするとき, $\sin\theta$を求めよ。

ヒント なくてもいけるでしょ?

〈内積の物理への応用〉

仕事 $W=\vec{F}\cdot\vec{x}$ である。



水平面から30°の向きに4Nの力を加えて5m水平に動かしたときの仕事Wを求めよ。

2. 外積

外積は空間ベクトル限定の演算である。

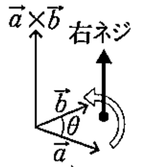
⚠外積は内積とは違いベクトルである。

★外積の定義

① $\vec{a}\times\vec{b}$ の大きさは$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$で向きは$\vec{a}$から$\vec{b}$への右ネジの向き

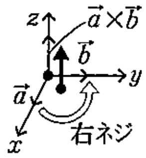
② $\vec{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$, $\vec{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$のとき

$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y,\ a_zb_x-a_xb_z,\ a_xb_y-a_yb_x)$



Ex4 $\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{b}=(0,\ 1,\ 0)$のとき

$\vec{a}\times\vec{b}=(0-0,\ 0-0,\ 1-0)=(0,\ 0,\ 1)$



Pr4 $\vec{a}=(1,\ -1,\ 2)$, $\vec{b}=(3,\ 1,\ 2)$のとき

(1) $\vec{a}\times\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\vec{b}\times\vec{a}$ を求めよ。

★

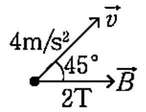
(1), (2)から分かるように, $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ であり, 交換法則は成り立たない!

(3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ のどちらにも垂直な, 大きさが1であるベクトルを求めよ。 ヒント 答は2つ

(4) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ がなす角をθとするとき, $\sin\theta$を求めよ。

〈外積の物理への応用〉 磁束密度$[\overset{テスラ}{\mathrm{T}}]$

ローレンツ力 $\vec{F}=q(\vec{v}\times\vec{B})$ である。



磁束密度が2Tの一様な磁場に, 電気量3Cの点電荷を磁場の向きから45°をなす向きに速さ4m/sで打ちだした。このとき, 点電荷が受けるローレンツ力の大きさを求めよ。また, その向きを図示せよ。

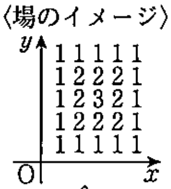
3. スカラー場の勾配

アメダスのようなイメージ

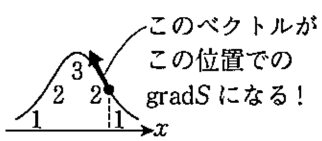
値Sが位置の関数になっているとき, それを場という。場を曲面としてみたとき, ある点で高い方へ向かうベクトル(勾配はベクトル!!)のことをスカラー場Sの勾配といい, grad$S$もしくは∇Sと表す。

(gradient"勾配") ナブラSとよむ

〈場のイメージ〉 横から見ると



→



⇑

こっちから見る

★スカラー場の勾配の定義

スカラー場Sがあるとき ←場はスカラー

勾配 $\mathrm{grad}\,S=\left(\dfrac{\partial S}{\partial x},\ \dfrac{\partial S}{\partial y}\right)$ ←勾配はベクトル

※空間のときには $\mathrm{grad}\,S=\left(\dfrac{\partial S}{\partial x},\ \dfrac{\partial S}{\partial y},\ \dfrac{\partial S}{\partial z}\right)$

Ex5 スカラー場 $S=x^2+y^2+xy$ に対し

$\mathrm{grad}\,S=(2x+y,\ 2y+x)$

Pr5 (1) $\nabla(x\log y)$

★←から分かるように

$\nabla S_1S_2=S_1\nabla S_2+S_2\nabla S_1$

(2) $x\nabla\log y+\log y\nabla x$

(3) $\mathrm{grad}\,(x\sin y)(y\cos x)$ ヒント ↑を使う

(4) $\mathrm{grad}\sqrt{y}\,e^{x\sin z}$ ヒント 空間ベクトルになる

(5) $S=x^2+y^2+z^2+3xyz$があり, $\nabla S=\vec{A}(x,\ y,\ z)$とおく。$\vec{A}(1,\ 1,\ 2)$を求めよ。

★スカラーポテンシャル

$\vec{A}=-\nabla S$ のとき, Sを$\vec{A}$のスカラーポテンシャルという。

マイナスに注意!

〈スカラーポテンシャルの物理への応用〉

位置エネルギーは力のスカラーポテンシャルである!!

Ex6 3次元空間において重力は$(0,\ 0,\ -mg)$

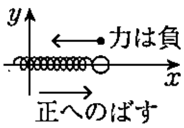
よって, 重力による位置エネルギーをUとすると$(0,\ 0,\ -mg)=-\nabla U$となればよい。

重力は鉛直方向すなわちz軸方向

$U=-\displaystyle\int(-mg)\,dz=mgz+C$ ← z成分なので, zで積分してやる

ここで$z=h$(高さ), 基準として$C=0$にすると$U=mgh$を得る。

Pr6 (1)平面においてx軸方向にのびるばねの弾性力は$(-kx,\ 0)$と表される。弾性力による位置エネルギーを求めよ。ただし, 原点を基準とする。$(C=0)$



(2)空間において原点にある質量Mの物体と位置$(x,\ y,\ z)$にある質量mの物体間の万有引力は, 次の通りである。

$$\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

ヒント 置換積分

位置$(x,\ y,\ z)$での万有引力による位置エネルギーを求めよ。ただし, 無限遠を基準とする$(C=0)$。

※スカラーポテンシャルをもつ力を保存力といい, 保存力に対して位置エネルギーを考えることができる。

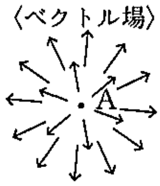
(ほとんどの力はx成分をxで積分したもの, y成分をyで積分したもの, z成分をzで積分したものが等しくならないため, スカラーポテンシャルをもたない)

4. ベクトル場の発散

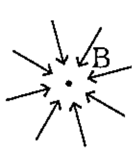
次は位置によってスカラーではなくベクトルが与えられている場合を考える。ある点からベクトルが湧き出す度合いをベクトル場$\vec{A}$の発散といい, div$\vec{A}$ もしくは $\nabla\cdot\vec{A}$ と表す。

(divergence"発散")

〈ベクトル場〉



左の点Aでは, ベクトルが湧き出しているので div$\vec{A}>0$



逆に, 左の点Bでは, ベクトルが収束しているので, div$\vec{A}<0$

★ベクトル場の発散の定義

ベクトル場 $\vec{A}=(A_x,\ A_y)$ があるとき，←場はベクトル

発散 $\mathrm{div}\vec{A}=\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}$ ←発散は$\boxed{\text{スカラー}}$!! ここ重要

※空間のときも同様に

$$\vec{A}=(A_x,\ A_y,\ A_z)\Longrightarrow \mathrm{div}\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$\boxed{\text{Ex7}}$ $\vec{A}=(x^2+2y+z,\ x+y^2+3z,\ 3x^2+y+3)$ のとき

$\mathrm{div}\vec{A}=2x+2y+0=2x+2y$

$\boxed{\text{Pr7}}$ (1) $\mathrm{div}\,y\left(x^2,\ x,\ \dfrac{z^2}{2}\right)$

$\boxed{\text{ヒント}}$ $y\left(x^2,\ x,\ \dfrac{z^2}{2}\right)=\left(x^2y,\ xy,\ \dfrac{yz^2}{2}\right)$

(2) $\underbrace{(\nabla y)}_{\text{grad}}\underset{\text{内積}}{\cdot}\left(x^2,\ x,\ \dfrac{z^2}{2}\right)+y\underbrace{\nabla\cdot\left(x^2,\ x,\ \dfrac{z^2}{2}\right)}_{\text{div}}$

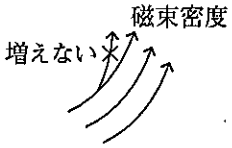
★(1)，(2)から分かるように

$\nabla\cdot(\underbrace{s}_{\text{スカラー}}\underbrace{\vec{A}}_{\text{ベクトル}})=\underbrace{(\nabla s)}_{\text{grad}}\underset{\text{内積}}{\cdot}\vec{A}+S\underbrace{(\nabla\cdot\vec{A})}_{\text{div}}$ ←gradの時と似たように，右のことが成り立つ

(3) $\mathrm{div}(ayz,\ bzx,\ cxy)$ ただし a，b，c は定数

(4) $\nabla\cdot\dfrac{1}{r^2}(x,\ y,\ z)$ ただし，r は原点からの距離

〈ベクトル場の発散の物理への応用〉

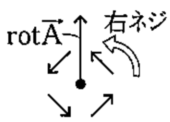


磁束密度 $\vec{B}$ について $\mathrm{div}\vec{B}=0$ である。この式は，磁束密度の発散は0である。すなわち磁場はどこからともなく増えたり減ったりせず，つながっているということを示す当たり前の式で，「マクスウェルの方程式」の第3式である。

さて，空間において磁束密度 $\vec{B}$ が存在し，位置 $(x,\ y,\ z)$ において $\vec{B}$ の x 成分は $z\sin x$ [T]，y 成分は $y\cos x$ [T] であるという。z 成分を求めよ。

5. ベクトル場の回転

ベクトル場があるとき，ある点において，そのまわりのベクトルの回転から，右ねじの向きに向かうベクトルをベクトル場 $\vec{A}$ の回転といい，$\mathrm{rot}\vec{A}$ もしくは $\nabla\times\vec{A}$ で表す。



(rotation"回転") $\mathrm{rot}\vec{A}$ の大きさは回転の強さ

※rotは空間限定の演算である。

★ベクトル場の回転の定義

ベクトル場 $\vec{A}=(A_x,\ A_y,\ A_z)$ があるとき，←場はベクトル

回転 $\mathrm{rot}\vec{A}=$ ↓回転もベクトル

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

※今まで使ってきた演算子 $\overset{\text{ナブラ}}{\nabla}$ は，実は $\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y},\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right)$ という意味である。よって

$$\mathrm{grad}\,s=\nabla s=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)s=\left(\frac{\partial s}{\partial x},\ \frac{\partial s}{\partial y},\ \frac{\partial s}{\partial z}\right)$$

であり，

$$\mathrm{div}\vec{A}=\nabla\cdot\vec{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\underset{\text{内積}}{\cdot}(A_x,\ A_y,\ A_z)$$

$$=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\ \text{である。}$$

$$\mathrm{rot}\vec{A}=\nabla\times\vec{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\underset{\text{外積}}{\times}(A_x,\ A_y,\ A_z)$$

$$=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

と考えると覚えやすい。

$\boxed{\text{Ex8}}$ $\mathrm{rot}(xyz,\ 2x^2,\ z^2-y^2)$

$$\begin{array}{cccl} \times & 4x & 0 & \leftarrow x\text{で偏微分} \\ xz & \times & -2y & \leftarrow y\text{で偏微分} \\ xy & 0 & \times & \leftarrow z\text{で偏微分} \end{array}$$

ひく　ひく　ひく

(ナブラ演算子との外積と考えると分かりやすい)

$=(-2y-0,\ xy-0,\ 4x-xz)=(-2y,\ xy,\ 4x-xz)$

$\boxed{\text{Pr8}}$ (1) $\mathrm{rot}(x^2y,\ x^2z,\ x^3)$

(2) $\nabla\times(yz,\ zx,\ xy)$

(3) $\nabla\times\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,\ y,\ z)$ ←これを使う

★grad，divと同様に

・$\nabla\times(s\vec{A})=\underbrace{(\nabla s)}_{\text{grad}}\underset{\text{外積}}{\times}\vec{A}+S\underbrace{(\nabla\times\vec{A})}_{\text{rot}}$

(4) $\underset{\text{div}}{\nabla\cdot}\{(x,\ y,\ y)\underset{\text{外積}}{\times}(z,\ x,\ x)\}$

(5) $\{\nabla\times(x,\ y,\ y)\}\cdot(z,\ x,\ x)-(x,\ y,\ y)\cdot\{\nabla\times(z,\ x,\ x)\}$

★(4)，(5)より

$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=(\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{B}-\vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$

(6) $\nabla\times(\nabla s)$ はスカラー場 S に関わらず $\vec{0}$ になることを示せ。

(7) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})$ はベクトル場 $\vec{A}$ に関わらず0になることを示せ。

$\boxed{\text{ヒント}}$ $\vec{A}=(A_x,\ A_y,\ A_z)$ とおいて計算

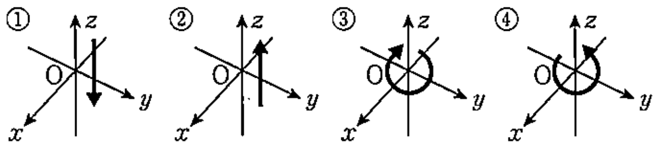
〈ベクトル場の回転の物理への応用〉

電場 $\vec{E}$ と磁束密度 $\vec{B}$ の関係は，$\mathrm{rot}\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ である。

この式は電場と磁場の関係を表す重要な式で，「マクスウェルの方程式」の第2式である。

さて，z 軸の正の向きに向かう一様な磁場があり，その強さは時間とともに比例的に強くなっていくとする。

次の内，電場のようすとして正しいものはどれか。



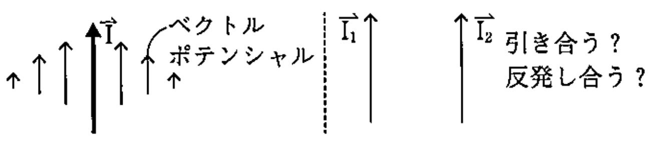
★ベクトルポテンシャル

$\vec{A}=\nabla\times\vec{B}$ のとき，$\vec{B}$ を $\vec{A}$ のベクトルポテンシャルという。

〈ベクトルポテンシャルの物理への応用〉

定常電流(時間的に変化しない電流)による位置エネルギーは，電流によって生じる磁束密度のベクトルポテンシャルと，電流ベクトルの内積にマイナスをつけたものである。

さて，直線電流のまわりの磁束密度は，電流と同じ向きで，電流から離れるほどその大きさは小さくなる。このことを利用し，同じ向きの平行電流は引き合うか，反発しあうか，答えよ。※$\boxed{\text{ヒント}}$ ものはエネルギーの低い方へと移動する。



※$\mathrm{div}\vec{A}=0$ならば，$\vec{A}$はベクトルポテンシャルをもつ。同様に，$\mathrm{rot}\vec{A}=\vec{0}$ならば$\vec{A}$はスカラーポテンシャルをもつ。このことは逆も成り立つ。(重要)

6. ラプラシアン

★ラプラシアンの定義

①スカラー場に作用するラプラシアン

$$\underset{\text{ラプラシアン}}{\Delta s}=\nabla\cdot(\nabla s)=\nabla\cdot\left(\frac{\partial s}{\partial x},\ \frac{\partial s}{\partial y},\ \frac{\partial s}{\partial z}\right)$$

※デルタではない
$$=\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

②ベクトル場に作用するラプラシアン

$$\Delta\vec{A}=\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial y^2}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial z^2}$$

※ラプラシアンΔは，∇^2(ナブラ2乗)とも書く。

Ex9 $\Delta(x^2y^2z^2)=\nabla\cdot(2xy^2z^2,\ 2x^2yz^2,\ 2x^2y^2z)$
$$=2y^2z^2+2z^2x^2+2x^2y^2$$

$\nabla^2(x,\ y^2,\ z^3)$
$$=\frac{\partial}{\partial x}(1,\ 0,\ 0)+\frac{\partial}{\partial y}(0,\ 2y,\ 0)+\frac{\partial}{\partial z}(0,\ 0,\ 3z)$$
$$=(0,\ 0,\ 0)+(0,\ 2,\ 0)+(0,\ 0,\ 6z)$$
$$=(0,\ 2,\ 6z)$$

Pr9 (1) $\Delta(xe^y\sin z)$

(2) $\nabla^2(\log xyz)$

(3) $\nabla^2\dfrac{1}{\sqrt{x+yz}}$

(4) $\Delta\left(\dfrac{yz}{x},\ \dfrac{zx}{y},\ \dfrac{xy}{z}\right)$

(5) $\nabla^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{y^2+z^2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{z^2+x^2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

ヒント x成分だけ求めて，あとのy，z成分は対称性をつかう

★rotのrotを∇で表す公式

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\Delta\vec{A}$$

(6) 上のことを証明せよ。(x成分のみでよい)

(7) $\nabla\times\{\nabla\times(x^3yz,\ xy^3z,\ xyz^3)\}$ ヒント

(8) $\nabla\times\{\nabla\times(yz\sqrt{x},\ zx\sqrt{y},\ xy\sqrt{z})\}$ ↖を利用

そのままやるとえらいこっちゃ

〈ラプラシアンの物理への応用〉

電荷や電流のない真空中では，電場$\vec{E}$について次のことが成り立つ。

$$\Delta\vec{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\quad(c:\text{光速})$$

※実際にはこの状況は少しおかしい

さて，ある電場$\vec{E}$について$\mathrm{div}\vec{E}=0$，$\mathrm{rot}\vec{E}=(3z,\ 4x,\ -2x)$が成り立つとき，時刻$t$における$\vec{E}$[N/C]を$t$，$c$で表せ。

ただし，$t=0$において$\vec{E}=\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0$とする。(初期条件)

7. 場の演算のまとめ

次の(　　)にベクトルorスカラーを入れる

- gradは(　　)場から(　　)場をつくる。
- divは(　　)場から(　　)場をつくる。
- rotは(　　)場から(　　)場をつくる。←空間限定
- Δはスカラー場に作用して(　　)場を，ベクトル場では(　　)場をつくる
- $\vec{A}=-\nabla S$のとき，Sを$\vec{A}$の(　　)ポテンシャルという。
  ※このような$\vec{A}$をラメラー状であるという。
- $\vec{C}=\nabla\times\vec{B}$のとき，$\vec{B}$を$\vec{C}$の(　　)ポテンシャルという。
  ※このような$\vec{C}$をソレノイド状であるという。

- 内積は(　　)
- 外積は(　　)
  空間限定

Ⅲ　マクスウェル方程式から入る電磁気

0. 数学的な前置き

マクスウェル方程式を理解するには，ベクトル解析の知識が必要である。ここではそれらを紹介するが，大切なのは意味(イメージ)を理解することであり，具体的な計算方法は省略する。　※詳細は「ベクトル解析を2時間で」参照

★微分に関する演算

①勾配　$\mathrm{grad}\varphi$ or $\nabla\varphi$

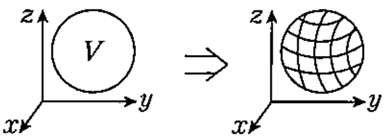
②発散　$\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ or $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$

③回転　$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ or $\nabla\times\boldsymbol{A}$

※ 大学では，ベクトルは矢印ではなく，太字で表す。Ex) $\vec{A}=\boldsymbol{A}$

★積分に関する演算：結果はすべてスカラー!!

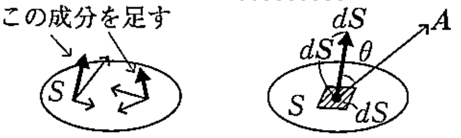
①体積分…空間を微小領域に分けて，足し合わせる。要するに，普通の積分と一緒で範囲が体積なだけ！



$\displaystyle\int_V\varphi dV$と書く。

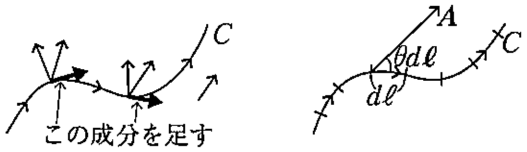
※対象はスカラー場である。(以下の2つはベクトル)

②面積分…ベクトル場の，面に垂直な成分だけ足しあわせる。



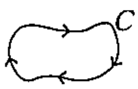
要するに，微小面積dSを考えて，その面積に等しく面に垂直なベクトル$\boldsymbol{dS}$とベクトル場の内積をとって足し合わせればよいので，$\displaystyle\int_S\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{dS}$と表す。

③線積分…ベクトル場の，線に沿う成分だけを足し合わせる。



要するに，面積分のときと同様，今度は線の微小部分$d\ell$を大きさとし，線に沿う向きのベクトル$\boldsymbol{d\ell}$とベクトル場の内積をとって足し合わせればよいので，$\displaystyle\int_C\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{d\ell}$と表す。

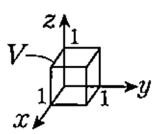
特に，閉曲線をぐるっと1周線積分するときは，$\displaystyle\oint_C\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{d\ell}$と表す。



※面積分はどちらの面を正にするか，線積分は線をどっち方向に沿って積分するかで正負がある。

※いずれにしても，普通の積分同様，値が一定であれば，積分はただのかけ算に他ならない。　これ重要

Ex1 $\varphi=xyz$を立方体の範囲$V(0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq z\leqq 1)$で体積分する。



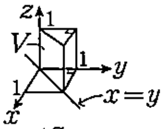
$$\rightarrow\int_V\varphi dV=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 xyzdxdydz$$
$$=\int_0^1\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^2yz\right]_0^1 dydz\quad\leftarrow x\text{以外定数扱い}$$
$$=\int_0^1\int_0^1\frac{1}{2}yzdydz\quad\leftarrow\text{あとも同様に}$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{4}y^2z\right]_0^1dz=\int_0^1\frac{1}{4}zdz=\underline{\frac{1}{8}}$$

★
積分の順序は関係ないので，計算がラクになるように!!

Pr1 (1) $\varphi=xy+z^2$ $(0\leqq x\leqq 2,\ -1\leqq y\leqq 1,\ -2\leqq z\leqq 2)$

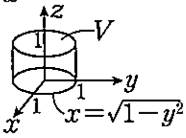
(2) $\varphi=e^{yz}$ (V：右のような三角柱)



ヒント $\int_0^1\int_0^1\int_0^y e^{yz}dxdydz$

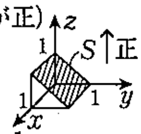
積分は，一定値ならただのかけ算!!

(3) $\varphi=2z$ (V：右のような円柱)



ヒント $\int_0^1\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}2zdxdydz$ $\quad x=\sqrt{1-y^2}$

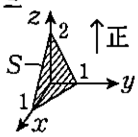
Ex2 $A=(0,\ 0,\ 1)$を長方形Sで面積分する(上が正)



Aの面に垂直な成分は常に$\frac{1}{\sqrt{2}}$である。

$$\therefore\ \oint_S A\cdot dS=\frac{1}{\sqrt{2}}\times(S\text{の面積})=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=\underline{1}$$

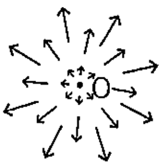
Pr2 (1) $A=(1,\ 0,\ 2)$ (S：右の二等辺三角形)



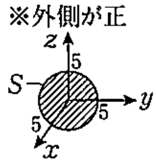
ヒント 平面の法線ベクトルを考えると分かりやすい

(2) $A=(x,\ y,\ z)$ (S：原点中心，半径5の球面)

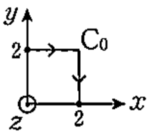
ヒント イメージしろ！
このベクトル場のイメージ⇒
常に球面に垂直になっている。では大きさは？



※外側が正



Ex3 $A=(3,\ 6,\ -1)$を折れ線Cで線積分する。

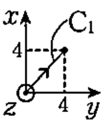


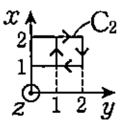
$$\to\oint_C A\cdot d\ell=\underbrace{3}_{x\text{軸に沿うので}x\text{成分}}\times\underbrace{2}_{\text{長さ}}+\underbrace{6}_{y\text{成分}}\times\underbrace{(-2)}_{\text{長さ}}=-6$$

Pr3 (1) Ex3 で線を逆に辿ると線積分の値はどうなるか。

(2) $A=(-2,\ 3,\ 0)$のC_1，C_2での線積分をそれぞれ求めよ。

ヒント とにかく線に沿う成分を考える

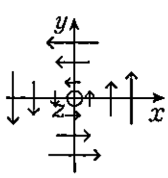


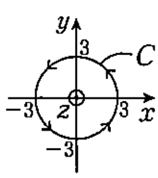


※C_2については$\oint_{C_2}A\cdot d\ell$と書ける

(3) $A=(-y,\ x,\ 0)$ (C：$x^2+y^2=9$を反時計回り)

ヒント イメージしろ！
このベクトル場のイメージ ⇒
常に円周に平行。
では大きさは？





※$\oint_C A\cdot d\ell$と書ける

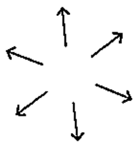
1.ガウスの定理とストークスの定理

★ガウスの定理

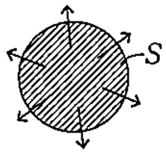
$$\int_S A\cdot dS=\int_V \mathrm{div}A\,dV\quad(\text{面積分}\Longleftrightarrow\text{体積分})$$

イメージを掴め!!（厳密な証明は省略）

div$A$は発散のこと　　　　面積分の完成



これを面でかこむ ⟹

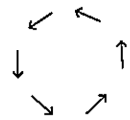


★ストークスの定理

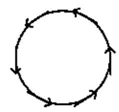
$$\oint_C A\cdot d\ell=\int_S \mathrm{rot}A\cdot dS\quad(\text{線積分}\Longleftrightarrow\text{面積分})$$

イメージを掴め!!（厳密な証明は省略）

rot$A$は回転のこと　　　線積分(特に，周回積分)の完成



ぐるっと1周線で囲む ⟹

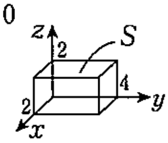


※これらの定理は，マクスウェルの方程式をいじくりまわすのに多用します。

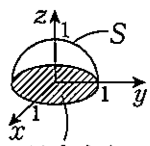
Ex4 ガウスの定理を用いて，$A=(0,\ 0,\ 1)$の，原点中心で半径1の球面Sでの面積分を求めよ。

$$\to\mathrm{div}A=0\text{より，}\int_V A\cdot dS=\int\mathrm{div}A\,dV=0$$

Pr4 (1) $A=(x,\ y,\ z)$
(S：右の直方体表面)



(2) $A=(0,\ 0,\ 2z+3)$ ※外側を正とする
(S：$x^2+y^2+z^2=1,\ 0<z$の半球面)



ヒント 底面は含まれないので，ガウスを使った後に，その分を別に計算したのを引く。

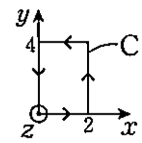
ここは含まない

答は$\frac{13}{3}\pi$なので，計算合わせようね。

Ex5 ストークスの定理を用いて，$A=(x-y,\ x-y,\ z)$のとき下の閉曲線Cでの線積分を求めよ。　この計算は割と大変

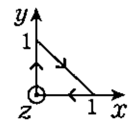
$$\to\mathrm{rot}A=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(x-y,\ x-y,\ z)=(0,\ 0,\ 2)$$

$$\therefore\ \oint_C A\cdot d\ell=\oint_S\mathrm{rot}A\cdot dS=\underbrace{2}_{z\text{成分}}\times\underbrace{8}_{\text{面積}}=16$$



Pr5 (1) rot$=(x^2-y,\ x-y^2,\ z^2)$を求めよ。

(2) $A=(x^2-y,\ x-y^2,\ z^2)$のとき，次の積分路に沿った周回積分を求めよ。
※積分路の向きに注意



2.マクスウェル方程式の概観

電磁気学の全ての現象は，次のマクスウェル方程式と，ローレンツ力の式$F=q(E+v\times B)$により説明がつく。

(i) $\mathrm{div}\underbrace{E}_{\text{電場}}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$（ガウスの法則）

(ii) $\mathrm{rot}E=-\frac{\partial B}{\partial t}$（ファラデーの法則）

(iii) $\mathrm{div}\underbrace{B}_{\text{磁束密度}}=0$（磁気モノポールの否定）

ε_0：誘電率〔F/m〕
μ_0：透磁率〔H/m〕
ρ：電荷密度〔C/m^3〕
J：電流密度〔A/m^2〕

(iv) $\mathrm{rot}B=\mu_0J+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t}$（アンペールの法則）

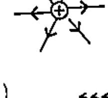
まず，それぞれ式のイメージをおさえておこう。

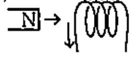
(i)「電荷があるところに電場が生まれる。」

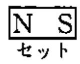
(ii)「磁束密度が変化すると，電場の渦が生じる。」

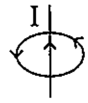
(iii)「磁束密度が湧き出さない。すなわち，『磁荷』は存在しない。4式目の$\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t}$の項は難しいので，とりあえず定常状態($E$や$B$が時間的に変化しない，すなわち時間微分が0)を考えると」

(iv)「電流があるところに磁束密度の渦が生じる。」
これからは，マクスウェルの方程式をいじくり回して教科書の公式を導いていくことにしよう！

(i)


(ii)


(iii)


(iv)


3. ガウスの法則

ガウスの法則はガウスの定理と名前が似ているが，別物である。

(i) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ ←この式をいじっていく。

divなので，ガウスの定理が使える！そこで，両辺を体積分する。

$$左辺=\int_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{E}dV=\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$$

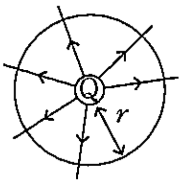
$$右辺=\int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}dV=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV=\frac{Q}{\varepsilon_0}\quad (Q：この領域内総電荷)$$

※電荷密度は「単位体積当たりの電荷」なので，体積かけたら電荷になる。

★ガウスの法則

$$\boxed{\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0}\quad (Q：領域内の電荷の総和)}$$

Ex6 点電荷による電場 $E=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$ の証明



点電荷を中心とし半径rの球面を考える。すると，球面上のどこでも$\boldsymbol{E}$は面に垂直で，しかも対称性よりどこでも大きさが等しい。よって，ガウスの法則より

$$\underbrace{E}\times\underbrace{4\pi r^2}_{球の表面積}=\frac{Q}{\varepsilon_0}\quad \therefore\ E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

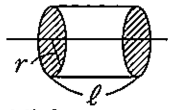
※$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\fallingdotseq 9.0\times10^9$ であり，高校ではこれをまとめてkとしているわけである。

Pr6 (1) Ex6 の結果より点電荷による力の大きさF,電位V,ポテンシャルUの式を示せ。

ヒント $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}=-\nabla V$，$\boldsymbol{F}=-\nabla U$を用いよ。

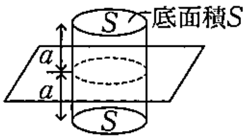
(2)長い導線に単位長さ当たりαの電荷が分布している。導線から距離r離れた所の電場の大きさを求めよ。

ヒント 右のような閉曲面を考える。斜線部分は打ち消し合って0である。



(3)広い平面に単位面積当たりσの電荷が分布しているとき，電場は平面からの距離に無関係で一定であることを示せ。

ヒント 右のような閉曲面を考える。円柱の側面は打ち消し合って0である。



(4)半径aの導体球に電気量qがチャージされている。横軸を球の中心からの距離，縦軸を電場の大きさとしてグラフをかけ。ただし，電荷は導体球の表面にのみ存在することに留意せよ。

(5)(4)において縦軸を電位としたグラフをかけ。ただし無限遠を基準とする。

4. ファラデーの電磁誘導の法則

(ii) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ ←$\boxed{この式をいじります。}$

rotなので，ストークスが使える！両辺を面積分すると

$$左辺=\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{\ell}=V \leftarrow \boxed{電位の定義}$$

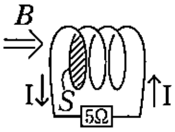
$$右辺=\int_S\left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=-\frac{\partial \Phi}{\partial t}\leftarrow\boxed{磁束}$$

※磁束密度は「単位面積を貫く磁束」なので，面積かけたら磁束になる。

★ファラデーの法則(電磁誘導)

$$\boxed{V=-N\frac{\partial \Phi}{\partial t}\ ※巻き数がNの場合N倍になることに注意}$$

Ex7 巻数100，断面積1cm²のコイルに磁石を近づけ，磁束密度を毎秒20mTの割合で増加させる。コイルを5Ωの抵抗につないだ場合，誘導電流の大きさを求めよ。



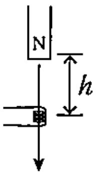
$$V=-N\frac{\partial B}{\partial t}\cdot S \leftarrow \boxed{この変形に注意}$$
$$=-100\times2\times10^{-2}\times1\times10^{-4}$$
$$\therefore |V|=2\times10^{-4}\mathrm{V}$$

よって，オームの法則より

$$I=\frac{2\times10^{-4}}{5}=4\times10^{-5}\mathrm{A}\,(0.04\,\mathrm{mA})$$

Pr7 (1)上の場合で，コイルの自己インダクタンスが0.2Hであるとき，誘導される磁束密度を求めよ。ヒント $\Phi=LI$

(2)巻数N，断面積Sのコイルの真上hの距離の場所から，長い磁石が自由落下し始め(これを$t=0$とする)そのままコイルを通過した。コイルが磁石に比べ十分に小さいとき，誘導起電力を時間の関数で表せ。ただし，磁石の一端から距離rの点における磁束密度は $B=\dfrac{\varphi}{4\pi r^2}$ (φ:定数)で表されるとする。



(3)一様な磁束密度Bに垂直に長さℓの導体棒が速さvで通過するとき，両端の電位差は $V=vB\ell$ であることを示せ。

5. アンペールの法則

(iii)式は右辺が0で変形する意味がないので，次にするのは(iv)式です。前述の通り $\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ の項は難しいので，定常状態のみを考えることにします。すると，

(iv)′ $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$ ←$\boxed{この式をいじります。}$

rotなので，ストークスを使います。両辺を面積分して

$$左辺=\int_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\ell}$$

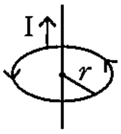
$$右辺=\int_S \mu_0\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}=\mu_0\int_S \boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{S}=\mu_0 I$$

※電流密度は「単位面積を貫く電流」なので，面積かけたら電流

★アンペールの法則

$$\boxed{\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{\ell}=\mu_0 I\quad (I：領域内の電流の総和)}$$

Ex8 直線電流による磁束密度 $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ の証明

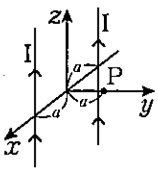


直線電流を中心とする半径rの円周を考える。すると，円周上のどこでも$\boldsymbol{B}$は曲線に沿った向きで，しかも対称性よりどこでも大きさが等しい。よって，

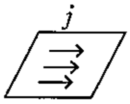
アンペールの法則より $B\cdot2\pi r=\mu_0 I\quad \therefore\ B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Pr8 (1)上の結果を利用して，右の図のような点Pでの磁束密度をベクトル表示せよ。

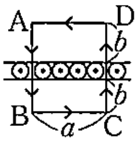
ヒント 電場や磁束密度は，重ね合わせができる



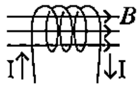
(2)薄い導体シートに単位幅当たりjの電流が流れている。磁束密度はシートからの距離に無関係で一定であることを示せ。



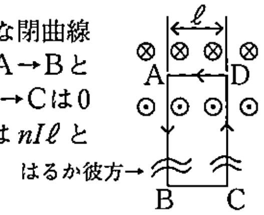
ヒント 断面図を考えて，右のような閉曲面ABCDを考える。A→BとC→Dは打ち消し合って0である。



(3)単位長さ当たりの巻き数がnのコイルに電流Iが流れているとき，コイル内部の磁束密度を求めよ。



ヒント コイル断面で右のような閉曲線ABCDを考える。A→BとC→Dは打ち消し，B→Cは0としてよい。貫く電流は$nI\ell$と表される。

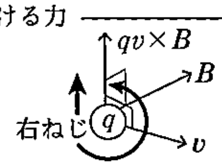


6.ローレンツ力

次に，マクスウェル方程式の第5式みたいなものであるローレンツ力について学習しよう。ローレンツ力は正確には$qv\times B$の部分を指すので，この式は電場による力と磁場による力(ローレンツ力)の合力を表している。

★電荷が電磁場から受ける力

$$F=q(\underbrace{E}_{\text{電場による力}}+\underbrace{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}}_{\text{ローレンツ力}})$$



外積の定義より，$v\to B$の右ねじの向きになる

Ex9 20Tの一様な磁束密度の中に質量0.10kg，電荷+4.0mCの点電荷が速さ5.0m/sで垂直入射した。加速度を求めよ。

→$ma=qv\times B$より$0.10\times a=0.40\times10^{-3}\times5.0\times20$

∴ $a=0.40\,\mathrm{m/s^2}$(この加速は常に速度に垂直なので，円運動する。)　ヒント エネルギー保存の法則

Pr9 (1)上の円運動の半径，周期を求めよ。

(2)電荷$-e$，質量mの電子を電位差Vで加速させ，一様な磁束密度Bと角度θをなして速さvで入射させた。その後の運動を解析せよ。

ヒント 力の働かない方向は等速運動

(3)一様な磁束密度Bに垂直に置かれた長さℓの導線に電流Iが流れる時，動く力$F=IB\ell$で表されることを示せ。また，向きを図示せよ。ただし，電子の電荷をe，単位体積当たりの数(数密度)をn，速さをv，導線の断面積をSとするとき$I=envS$と表されることを用いよ。

(4)Pr8 (1)の2本の直線電流が及し合う力を求めよ。斥力か？はたまた，引力か？

ヒント アンペールの法則と前問

※ちなみに思うに$I=envS$は物理チャレンジ最頻出である。

7.電磁波

最後のまとめとして，マクスウェル方程式をフル活用して電磁波について考察しよう。電荷，電流がないとき，マクスウェル方程式は次のように書きかえられる。(便利のため∇を使う表記にした)

(i) $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$　　(iii) $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$

(ii) $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$　　(iv) $\nabla\times\boldsymbol{B}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$

まず，(ii)式の両辺の両辺にrotをとり，恐らく忘れているであろう$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$を用いて変形する。　(「ベクトル解析」参照)

(i)式より0になる！

左辺$=\nabla\times(\nabla-\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\nabla^2\boldsymbol{E}$

右辺$=\nabla\times\left(-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)=-\dfrac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\nabla\times\boldsymbol{B})}_{\text{(iv)式}}$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

よって　$-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}$　∴$\dfrac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\dfrac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\nabla^2\boldsymbol{E}$となる。

この式は何を意味しているのだろうか。実は，波動というものは必ず次のような式で表されることが知られている。

★波動方程式

位置xと時間tの関数$f(x,t)$が波であることは，

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\underbrace{v^2}_{\text{定数}}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$と同値で，しかもその速さは$v$となる。

※高校の「波動方程式」はsin波しか表せない無能なものである。∇^2は位置での2回微分(だよ？忘れてたら「ラプラシアン」参照)を表すので，この式は，波動方程式の形である!!

しかも速さ$\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$で伝播することを示している。

Pr10 (1)上と同じようにBについてもマクスウェル方程式を変形せよ。驚愕の事実が判明する。

(2)測定の結果，真空中の誘電率$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$，透磁率$\mu_0=1.27\times10^{-6}\,\mathrm{H/m}$であることが知られている。$\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$を計算せよ。どこかで見た数値ではないか…!? ※ピンとこない人は，しっかり勉強しよう。

$B=\mu_0H$という関係がある磁場Hを使って$E\times H$(電場×磁場)という量を考えよう。divをとって，マクスウェルの方程式と次の式で変形する。

$\nabla\cdot(A\times B)=B\cdot(\nabla\times A)-A\cdot(\nabla\times B)$

(忘れている人は「ベクトル解析」参照)

$\nabla\cdot(E\times H)=H\cdot\underbrace{(\nabla\times E)}_{\text{(iv)式}}-E\cdot(\nabla\times H)$　$\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times B$で，(iv)式

※内積$A\cdot A$をA^2と書く。

$=H\cdot\left(-\dfrac{\partial B}{\partial t}\right)-E\cdot\left(\varepsilon_0\dfrac{\partial E}{\partial t}\right)$

$=-\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{2}\mu_0H^2+\dfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2\right)$

合成関数の微分　$x\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}(x^2)'\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)$

両辺を体積分して，ガウスの定理を適用すると

左辺$=\displaystyle\int_V\nabla\cdot(E\times H)\,dV=\int_S(E\times H)\cdot dS$

右辺$=\displaystyle\int_V\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mu_0H^2+\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\right)\right\}dV$

$\displaystyle=-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}\mu_0H^2\right)dV$

実は，$\dfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2$，$\dfrac{1}{2}\mu_0H^2$はそれぞれ電場，磁場のもつ単位体積当たりのエネルギー密度であることが知られている。それを体積分するとエネルギーなので，右辺は単位時間に通過するエネルギーを表している。左辺が面積分であることより，単位面積当たりなので，

ちなみに，人名 Poynting
「指す」pointingではない。

★ポインティングベクトル

電磁波の話に限り，$E\times H$は単位面積を単位時間に通過するエネルギー流を表す。

Pr11 電流Iが流れる半径r，長さℓの円柱抵抗Rで発生するジュール熱は円柱周囲のポインティングベクトルに一致する。すなわちジュール熱の正体は電磁波による熱放射であることを示せ。

ヒント $E=\dfrac{V}{\ell}=\dfrac{IR}{\ell}$と表される。また，$H$はアンペールの法則で求められる。円柱側面でのポインティングベクトルの面積分が電力$P=I^2R$に一致することを示す。

岡山県立倉敷天城高等学校

〒 710-0132　岡山県倉敷市藤戸町天城 269 番地

TEL　086-428-1251　　FAX　086-428-1253

URL　　http://www.amaki.okayama-c.ed.jp/

e-mail　　amaki@pref.okayama.jp　（学校代表）